FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA: UM ENFOQUE APLICADO AO ENSINO TÉCNICO

Maristela de Quadros Albé[1]
Rosane Maria Jardim Filippsen[2]

Resumo

Este artigo propõe o emprego do software Advanced Grapher para realizar uma atividade que envolve leitura, interpretação, construção de gráficos e aplicações de funções trigonométricas do tipo seno e cosseno. Embora seja uma proposta, esta atividade foi desenvolvida na 2ª série do Ensino Médio do curso de Eletrônica da Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha, em Novo Hamburgo, RS.

Palavras-chave: Função trigonométrica, Circuitos senoidais, Software gráfico.

Abstract

This article proposes the use of a software called “Advanced Grapher” as a tool in an activity of reading, interpreting and drawing of sine and cossine trigonometric functions’ graphics. Although it is a proposal, this activity was developed with High School second grade students from the electronics course at Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha, at Novo Hamburgo – RS.

Keywords: Trigonometrics function, sine circuit, graphic software.

1 Introdução

Os avanços tecnológicos têm causado modificações significativas nos paradigmas educacionais, provocando necessidade de nova consciência sobre como construir conhecimento. A utilização crescente de recursos da informática, como softwares educativos e o acesso a Internet, favorece a expressão de idéias na construção de um sujeito ativo, autônomo, produtivo e comprometido com o mundo, exigindo nova postura do professor frente a si mesmo, ao aluno e ao ato de conhecer.

As transformações ocorridas no mundo contemporâneo fizeram com que a Educação Matemática fosse se adequando a uma nova realidade. Cada vez mais a matemática está presente nas diversas atividades da vida contemporânea, daí a necessidade de se proporcionar aos jovens um conhecimento matemático capaz de inseri-los no mundo do trabalho como cidadãos conscientes. A matemática é uma forma de perceber e atuar no mundo, já que é um conhecimento construído por indivíduos que interagem com um contexto natural, social e cultural.

A construção do saber não acontece se o educando não interage, não participa dessa construção, assim, entende-se que é falsa a idéia que o aluno passivo constrói o conhecimento. Nesse sentido a implantação da Informática Educativa nas escolas deve

[1] Professora da Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha. Mestre em Engenharia com ênfase em Energia, pela ULBRA. E-mail: maristela.albe@brturbo.com.br
[2] Professora da Fundação Educacional Encosta Inferior do Nordeste, Faculdade de Engenharia e Matemática, FACCAT. Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, pela ULBRA. E-mail: filipsen@terra.com.br

ater-se a essa questão fundamental que é a de tornar o aluno o mais ativo possível, respeitando porém, suas características individuais. Logo, os educandos

> precisam aprender a investigar, dominar as diferentes formas de acesso à informação, desenvolver a capacidade crítica de avaliar, reunir e organizar informações mais relevantes. Necessitam de metodologias que desenvolvam habilidades para manejar e produzir conhecimento, que levem ao questionamento, às manifestações de curiosidade e criatividade e ao seu posicionamento como sujeitos diante da vida. (MORAES, 2000, 144)

A escola que pretende um aluno ativo, reflexivo e criativo precisa proporcionar a esse aluno situações que exijam que ele faça, experimente, enfim que reflita para tomar decisões. A interação aluno-computador pode ser uma ótima oportunidade para o educando desenvolver o hábito de buscar informações e resolver problemas, exercitando o pensamento e o raciocínio. O computador possibilita a manipulação dos símbolos, modela a realidade, cria o virtual para torná-lo concreto. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática,

> o bom uso que se possa fazer do computador na sala de aula também depende da escolha de softwares, em função dos objetivos que se pretende atingir e da concepção de conhecimento e de aprendizagem que orienta o processo.(1998, 44)

O presente trabalho tem por objetivo o estudo de funções trigonométricas do tipo $y = b + asen(kx + q)$ e $y = b + a\cos(kx + q)$, utilizando um software gráfico e enfocando a aplicação destas funções em conteúdos curriculares nas disciplinas da área técnica do curso de Eletrônica. Para tal, é importante que o aluno conheça os diferentes modelos de funções e que seja estimulado por meio de atividades que permitam a construção do conhecimento.

Justifica-se essa abordagem do conteúdo, pois se entende que dessa forma será dada continuidade ao trabalho desenvolvido pela disciplina de Matemática, no estudo de funções na primeira série do Ensino Médio e também da-rá subsídios para que o aluno construa alguns conceitos como amplitude, translação, período, deslocamento de fase ou defasagem e freqüência utilizados no Ensino Profissional.

O recurso computacional utilizado no desenvolvimento das atividades pode ser um software livre como o Scilab ou outro software de análise matemática, que o professor utilize e seja de fácil acesso aos alunos. Neste trabalho utiliza-se o software matemático Advanced Grapher por ser licenciado para uso na Fundação Liberato.

Sugere-se assim uma seqüência de atividades a serem desenvolvidas para que o aluno observe e conclua os efeitos determinados pelos coeficientes das funções, em seus respectivos gráficos, por meio do uso do software, bem como das aplicações no ensino profissional.

2 Fundamentos conceituais

Para que esta atividade tenha êxito, é importante que o estudo de funções desenvolvido na primeira série tenha sido ministrado por meio deste enfoque. Para demonstrar a abordagem, utilizar-se-á, como exemplo, a função quadrática e algumas famílias desta função, demonstrando como se pode obter as noções de alongamento, compressão, translação e reflexão, a partir do trabalho anterior já realizado.

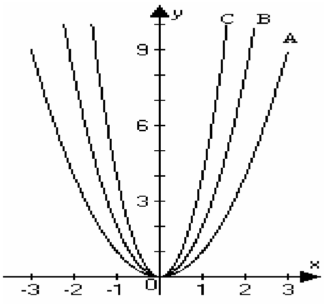
Para os seis grupos de famílias de funções quadráticas apresentadas a seguir, os alunos construíram gráficos observando domínio, contra-domínio, imagem e escreveram as modificações ocorridas nas outras curvas se comparadas com a curva A.

Grupo 01

(A) $y = x^2$

(B) $y = 2x^2$

(C) $y = 4x^2$



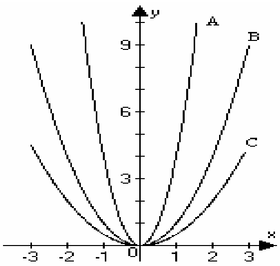
Quando se compararam as curvas B e C com a curva A, observa-se, nesta família de funções, que houve alongamento vertical.

Grupo 02

(A) $y = x^2$

(B) $y = \frac{1}{2}x^2$

(C) $y = \frac{1}{4}x^2$

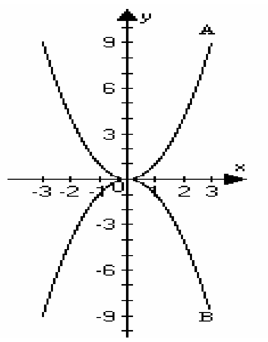


Quando se compararam as curvas B e C com a curva A, observa-se, nesta família de gráficos, que houve compressão vertical.

Grupo 03

(A) $y = x^2$

(B) $y = -x^2$



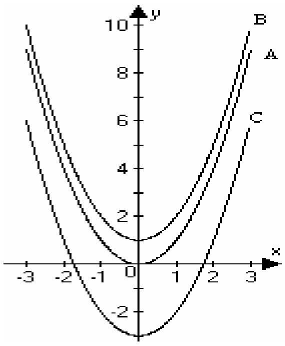
Quando se comparara a curva B com a curva A, observa-se, nesta família de funções, que houve reflexão vertical.

Grupo 04

(A) $y = x^2$

(B) $y = x^2 + 1$

(C) $y = x^2 - 3$



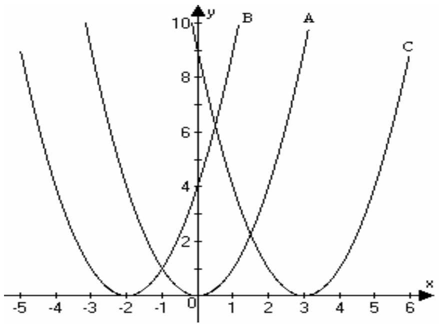
Quando se compararam as curvas B e C com a curva A, observa-se, nesta família de funções, que houve translação vertical de uma unidade para cima e três unidades para baixo respectivamente.

Grupo 05

(A) $y = x^2$

(B) $y = (x+2)^2$

(C) $y = (x-3)^2$



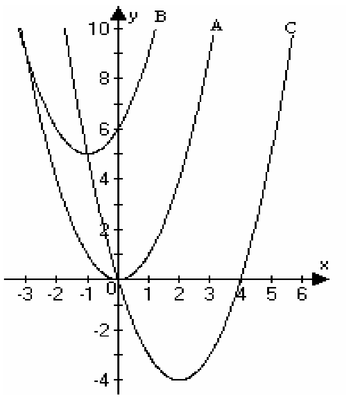
Quando se compararam as curvas B e C com a curva A, observa-se, nesta família de funções, que houve translação horizontal de duas unidades para a esquerda e três unidades para a direita respectivamente.

Grupo 06

(A) $y = x^2$

(B) $y = (x+1)^2 + 5$

(C) $y = (x-2)^2 - 4$



Quando se compararam as curvas B e C com a curva A, observa-se, nesta família de funções, que houve translação vertical de cinco unidades para cima e quatro unidades para baixo, houve também translação horizontal de uma unidade para a esquerda e duas unidades para a direita respectivamente.

Convém salientar que, neste momento, interessa apenas mostrar como os alunos construíram as noções de alongamento, compressão, translação e reflexão.

3 Proposta de trabalho

As funções trigonométricas podem ser modelos matemáticos de vários fenômenos que se repetem como as variações diárias na temperatura da atmosfera terrestre, a pressão sanguínea do coração e o nível de água em uma bacia marítima devido à sua periodicidade. Também são periódicos fenômenos como a tensão e a corrente elétrica domésticas, o campo eletromagnético gerado para aquecer comida no microondas, bem como o comportamento ondulatório de notas musicais, fluxo de caixa em negócios sazonais e funcionamento de máquinas rotativas. Ainda pode-se citar como fenômenos periódicos as fases da lua, as estações do ano, o clima, o movimento dos planetas entre outros.

Porém, a proposta de trabalho apresentada desenvolve conceitos e gráficos das funções trigonométricas seno e cosseno aplicados à área de eletrônica para análise de circuitos com excitação senoidal, com o auxílio do software gráfico Advanced Grapher. Para tal, propõe-se uma análise do que ocorre com estas funções quando seus parâmetros são alterados já que, muitas das aplicações em diferentes áreas do conhecimento são modeladas por funções trigonométricas do tipo $y = b + asen(kx+q)$ e $y = b + a\cos(kx+q)$ sendo a, b, k e q constantes reais. Os gráficos dessas funções podem ser obtidos alongando, comprimindo, transladando e refletindo apropriadamente cada gráfico, a partir das funções $y = senkx$ e $y = \cos kx$ respectivamente.

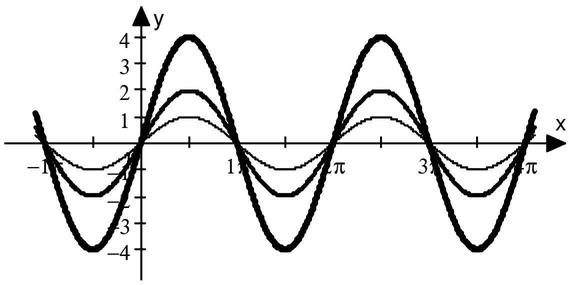
3.1 Aplicação matemática

Atividade: Construir os gráficos de cada conjunto de funções, a seguir, em um mesmo plano cartesiano e escrever as alterações observadas em cada um dos conjuntos, se comparadas com o gráfico da função $y = senkx$ ou $y = \cos kx$. As conclusões colocadas junto aos gráficos em itálico são algumas observações que os alunos obtiveram ao fazer a atividade proposta, a partir das funções $y = senkx$ e $y = \cos kx$ respectivamente.

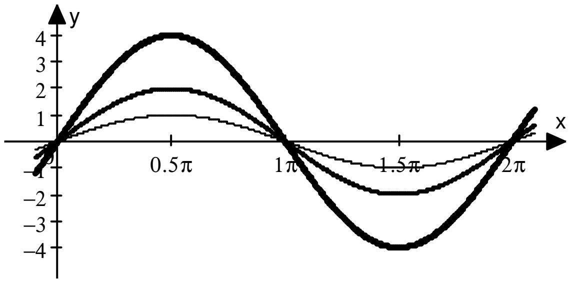
Grupo 01

Para as funções $y = b + asen(kx + q)$ e $y = b + a\cos(kx + q)$, faz-se $q = 0$, $k = 1$, $b = 0$, $a \neq 0$ e obtém-se as famílias de funções $y = asenkx$ e $y = a\cos kx$

$$\begin{cases} y = senx \\ y = 2senx \\ y = 4senx \end{cases}$$

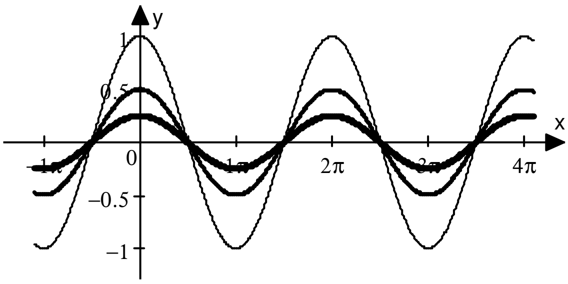


Se estes mesmos gráficos forem construídos em um período, tem-se:

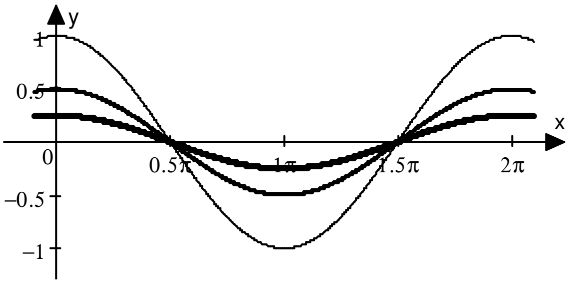


- mudando o coeficiente **a**, *a curva alonga na vertical e oscila entre* **–a** e **a**
- a curva se repete a cada 2π

$$\begin{cases} y = \cos x \\ y = \frac{1}{2}\cos x \\ y = \frac{1}{4}\cos x \end{cases}$$



Se estes mesmos gráficos forem construídos em um período, tem-se:



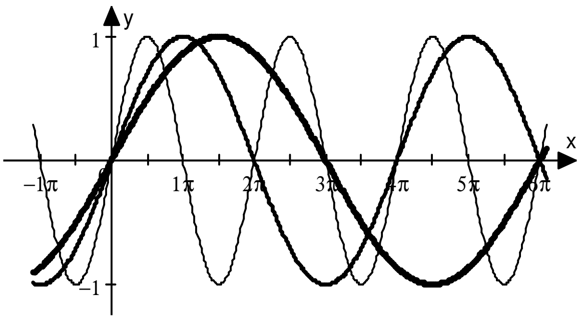
- *mudando o coeficiente* **a** *a curva comprime na vertical e oscila entre* **–a** e **a**
- *a curva se repete a cada* 2π

Grupo 02

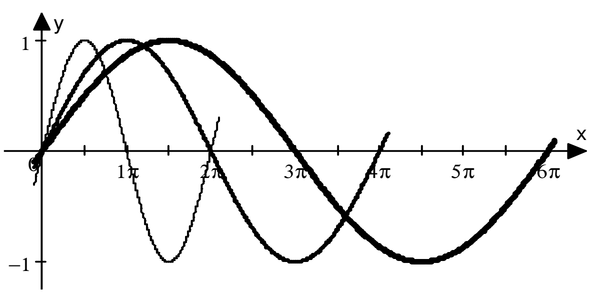
Nas funções $y = senx$ e $y = \cos x$ faz-se $q = 0$, $k = 1$, $b = 0$ e $a = 1$.

Para as demais funções $y = b + asen(kx + q)$ e $y = b + a\cos(kx + q)$, faz-se $q = 0$, $k \neq 0$, $b = 0$, $a = 1$ e obtém-se as famílias de funções $y = asenkx$ e $y = a\cos kx$.

$$\begin{cases} y = senx \\ y = sen\dfrac{x}{2} \\ y = sen\dfrac{x}{3} \end{cases}$$



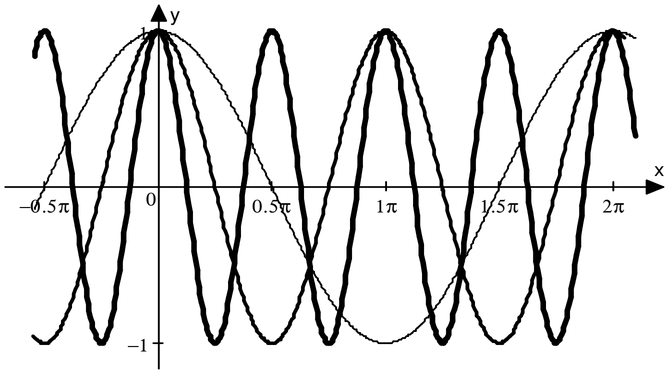
Se estes mesmos gráficos forem construídos em um período, tem-se:



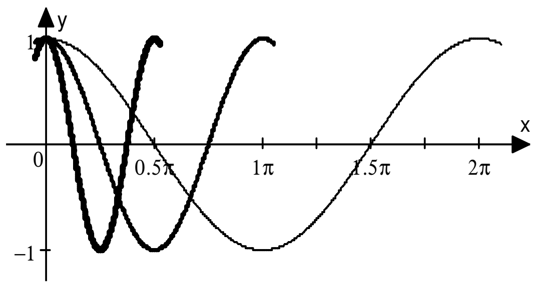
- mudando o coeficiente **k**, *a curva alonga na horizontal*

- a curva se repete a cada $\frac{2\pi}{k}$, *logo o período das curvas é* $2\pi,\ 4\pi\ e\ 6\pi$ *respectivamente*

$$\begin{cases} y = \cos x \\ y = \cos 2x \\ y = \cos(4x) \end{cases}$$



Se estes mesmos gráficos forem construídos em um período, tem-se:



- mudando o coeficiente **k**, *a curva comprime na horizontal*

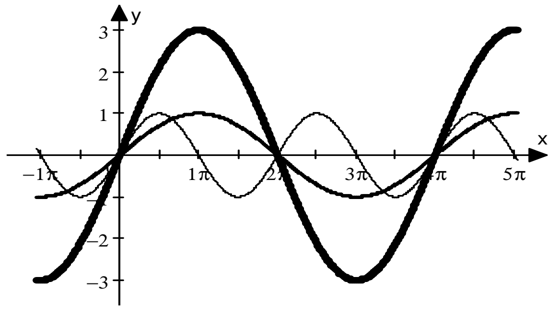
- a curva se repete a cada $\frac{2\pi}{k}$ *logo o período das curvas é* $2\pi,\ \pi\ e\ \frac{\pi}{2}$ *respectivamente*

Grupo 03

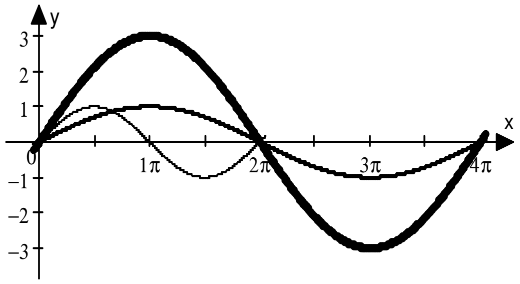
Nas funções $y = senx$, $y = \cos x$ e $y = -\cos x$ faz-se $q = 0$, $k = 1$, $b = 0$ e $a = 1$ ou $a = -1$.

Para as demais funções $y = b + asen(kx + q)$ e $y = b + a\cos(kx + q)$, faz-se $q = 0$, $k \neq 0$, $b = 0$, $a \neq 0$ e obtém-se as famílias de funções $y = asenkx$ e $y = a\cos kx$.

$$\begin{cases} y = senx \\ y = sen\frac{x}{2} \\ y = 3sen\frac{x}{2} \end{cases}$$



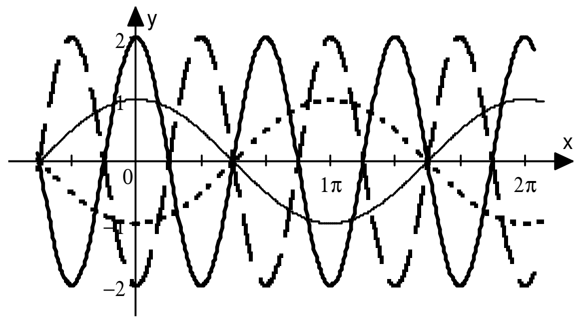
Se estes mesmos gráficos forem construídos em um período, tem-se:



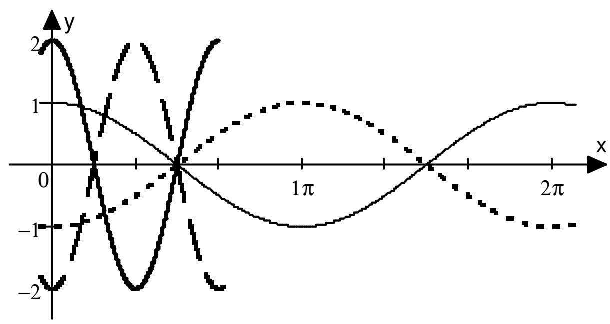
- mudando **k**, *a curva* $y = sen\frac{x}{2}$ *alonga na horizontal com período de* 4π*, porque* $P = \frac{2\pi}{k}$

- depois de alongar na horizontal mudando **a**, *a curva* $y = 3sen\frac{x}{2}$ *alonga na vertical e oscila entre* -3 *e* 3

$$\begin{cases} y = \cos x \\ y = -\cos x \\ y = 2\cos 3x \\ y = -2\cos 3x \end{cases}$$



Se estes mesmos gráficos forem construídos em um período, tem-se:



- a curva $y = -\cos x$ *se opõe a curva* $y = \cos x$*, ou seja, houve reflexão da curva*

- a curva $y = -2\cos 3x$ *é a reflexão da curva* $y = 2\cos 3x$

- além da reflexão citada no item anterior nas curvas $y = -2\cos 3x$ *e* $y = 2\cos 3x$*, ocorreu também*

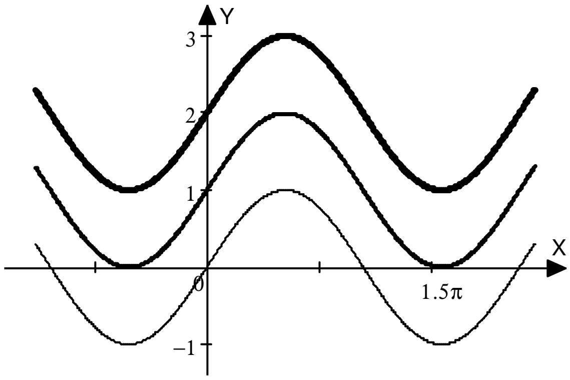
compressão na horizontal com período de $\frac{2\pi}{3}$ *e alongamento na vertical*

Grupo 04

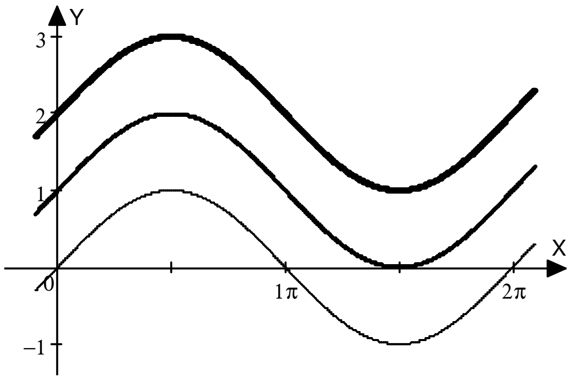
Nas funções $y = senx$, $y = \cos x$ e $y = -\cos x$, faz-se $q = 0$, $k = 1$, $b = 0$ e $a = 1$ ou $a = -1$.

Para as demais funções $y = b + asen(kx + q)$ e $y = b + a\cos(kx + q)$, faz-se $q = 0$; $k = 1$; $b \neq 0$ e $a \neq 0$ obtém-se as famílias de funções $y = b + asenkx$ e $y = b + a\cos kx$.

$$\begin{cases} y = senx \\ y = 1 + senx \\ y = 2 + senx \end{cases}$$

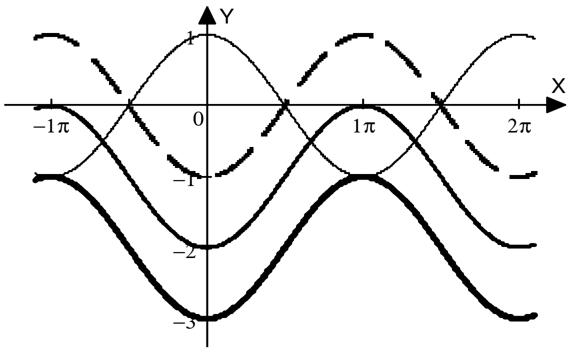


Se estes mesmos gráficos forem construídos em um período, tem-se:

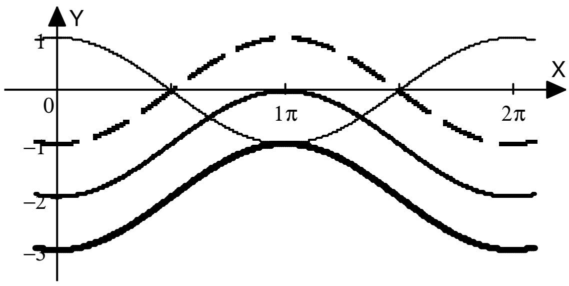


- *mudando o coeficiente* **b**, *a curva desloca na vertical para cima uma e duas unidades respectivamente*
- *a curva se repete a cada* 2π

$$\begin{cases} y = \cos x \\ y = -\cos x \\ y = -2 - \cos x \\ y = -1 - \cos x \end{cases}$$



Se estes mesmos gráficos forem construídos em um período, tem-se:

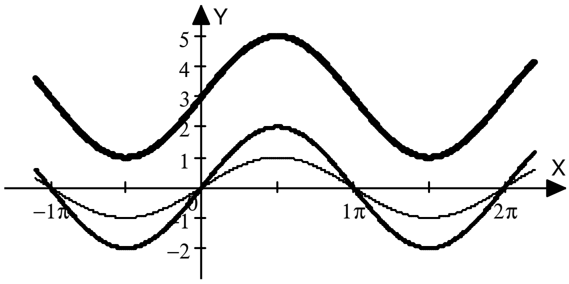


- a curva $y = -\cos x$ *se opõe a curva* $y = \cos x$*, ou seja, houve reflexão*

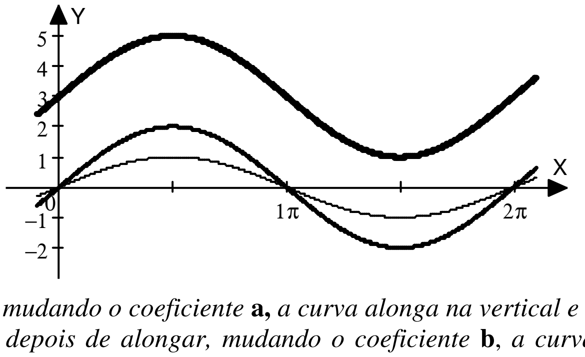
- depois da reflexão, mudando o coeficiente **b**, *a curva desloca ou translada na vertical para baixo duas e uma unidade respectivamente*

- a curva se repete a cada 2π

$$\begin{cases} y = senx \\ y = 2senx \\ y = 3 + 2senx \end{cases}$$



Se estes mesmos gráficos forem construídos em um período, tem-se:

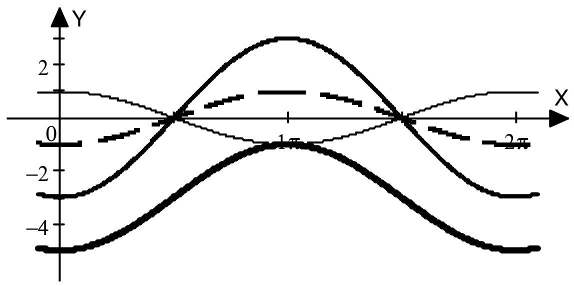


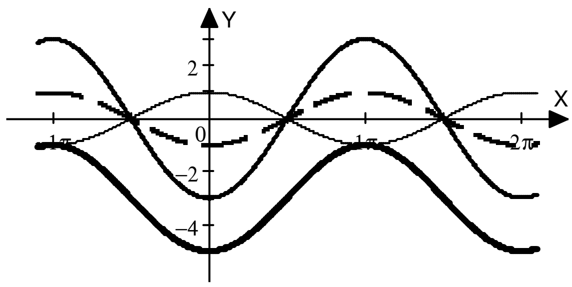
- mudando o coeficiente **a,** *a curva alonga na vertical e oscila entre* **–a** e **a**

- depois de alongar, mudando o coeficiente **b**, *a curva desloca ou translada na vertical três unidades para cima*

- a curva se repete a cada 2π

$$\begin{cases} y = \cos x \\ y = -\cos x \\ y = -3\cos x \\ y = -2 - 3\cos x \end{cases}$$





Se estes mesmos gráficos forem construídos em um período, tem-se:

- a curva $y = -\cos x$ *se opõe a curva* $y = \cos x$*, ou seja, houve reflexão da curva*

- depois da reflexa,o mudando o coeficiente ***a****, a curva alonga na vertical e oscila entre* ***–a*** *e* ***a***

- depois da reflexão e do alongamento, mudando o coeficiente ***b****, a curva desloca ou translada na vertical duas unidades para baixo*

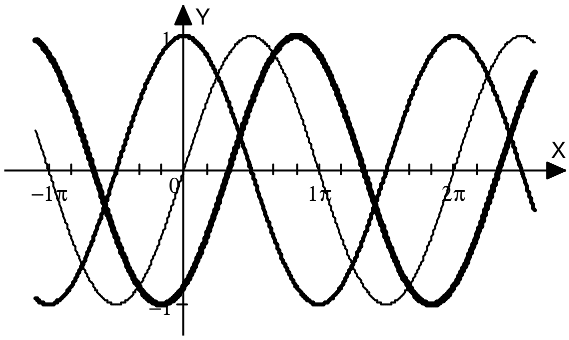
- a curva se repete a cada 2π

Grupo 05

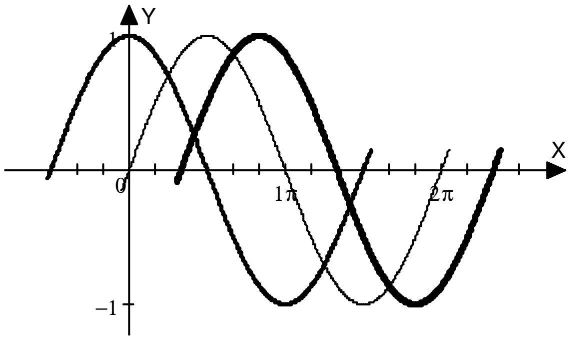
Nas funções $y = senx$, $y = \cos x$ e $y = -\cos x$, faz-se $q = 0$, $k = 1$, $b = 0$ e $a = 1$ ou $a = -1$.

Para as demais funções $y = b + asen(kx + q)$ e $y = b + a\cos(kx + q)$ faz-se $q \neq 0$; $k = 1$; $b = 0$ e $a = 1$ ou $a = -1$, obtém-se as famílias de funções $y = asen(kx + q)$ e $y = a\cos(kx + q)$. Será de grande valia se estas famílias forem escritas na forma $y = asen\left[k\left(x + \frac{q}{k}\right)\right]$ e $y = a\cos\left[k\left(x + \frac{q}{k}\right)\right]$.

$$\begin{cases} y = senx \\ y = sen\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ y = sen\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$



Se estes mesmos gráficos forem construídos em um período, tem-se:



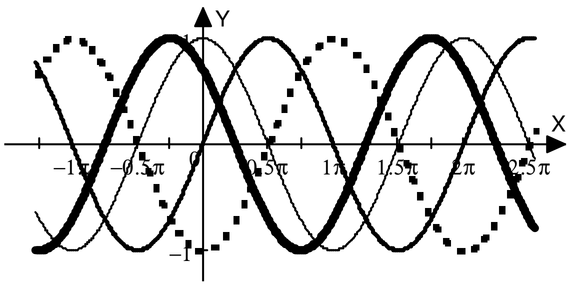
- *ocorrerá deslocamento ou translação horizontal se* $q \neq 0$

- *o deslocamento ou translação será* $\frac{q}{k}$ *para a direita ou para a esquerda*

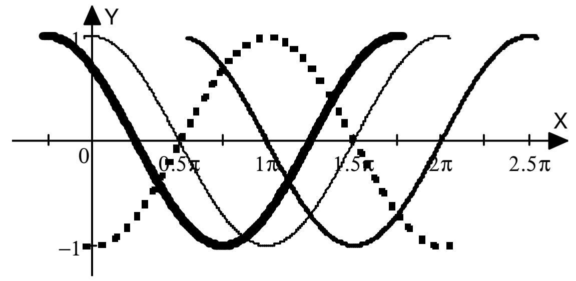
- *a translação será para a direita se* $\frac{q}{k} < 0$

- *a translação será para a esquerda se* $\frac{q}{k} > 0$

$$\begin{cases} y = \cos x \\ y = -\cos x \\ y = -\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \\ y = -\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$



Se estes mesmos gráficos forem construídos em um período, tem-se:



- a curva $y=-\cos x$ *se opõe a curva* $y=\cos x$*, ou seja, houve reflexão*

- depois da reflexão ocorrerá a translação horizontal de $\frac{\pi}{2}$ *para a função* $y=-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ *e de* $-\frac{\pi}{4}$ *para a função* $y=-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

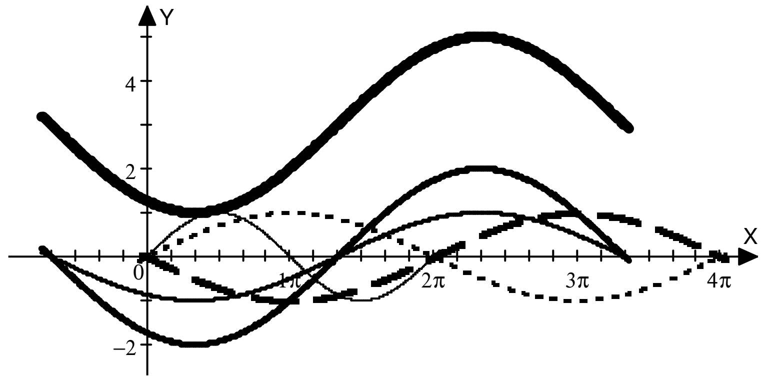
Grupo 06

Nas funções: $y=senx$ e $y=\cos x$ faz-se $q=0$, $k=1$, $b=0$ e $a\neq 0$.

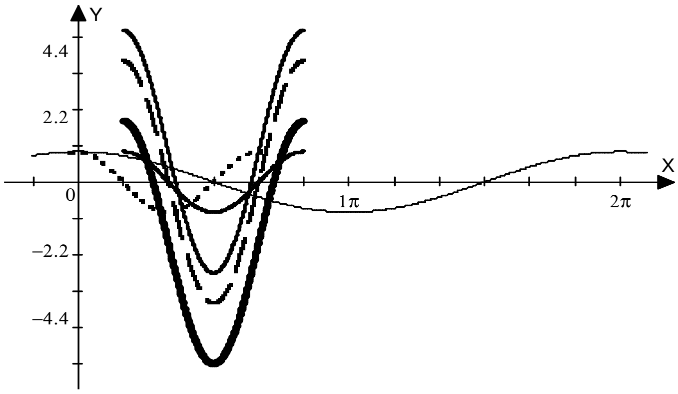
Para as demais funções $y=b+asen(kx+q)$ e $y=b+a\cos(kx+q)$ faz-se $q\neq 0$, $k\neq 0$, $b\neq 0$ e $a\neq 0$,obtém-se as famílias de funções $y=b+asen(kx+q)$ e $y=b+a\cos(kx+q)$.

Optou-se, neste grupo de funções, por uma seqüência de alterações nos parâmetros que conduzem às mesmas conclusões feitas nos grupos anteriores, bem como a construção gráfica em apenas um período.

$$\begin{cases} y=senx \\ y=sen\frac{x}{2} \\ y=-sen\frac{x}{2} \\ y=-sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) \\ y=-2sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) \\ y=3-2sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = \cos x \\ y = \cos 3x \\ y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \\ y = 4\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \\ y = 1 + 4\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \\ y = -2 + 4\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$



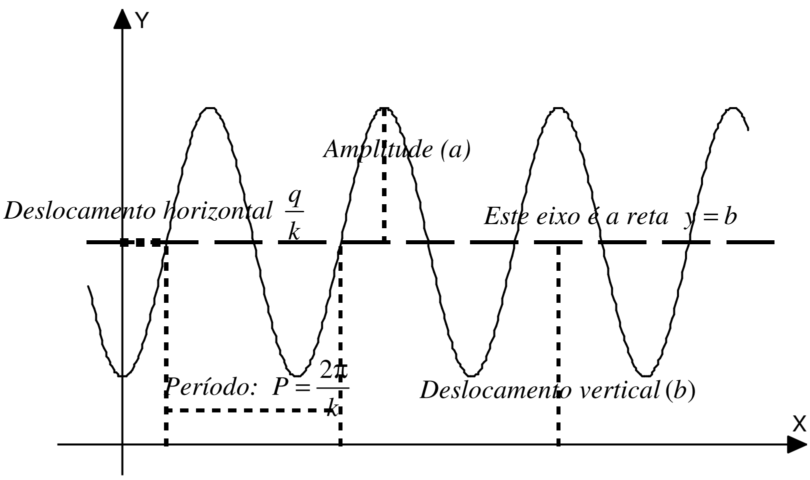
Conclusões e definições

efeito	**Observando as funções** $y = b + asen(kx+q)$ **e** $y = b + a\cos(kx+q)$ **e comparando com as funções** $y = senkx$ **e** $y = \cos kx$ **, respectivamente, pode-se concluir que:**
Alongamento e compressão vertical ou **Amplitude**	- o coeficiente ***a*** determina o alongamento ou a compressão vertical da curva e, por conseqüência, determina também o intervalo em que a curva oscila, ***-a*** a ***a***; - se ***a*** é negativo ($a < 0$) além do alongamento ou da compressão ocorrerá também a reflexão da curva em torno de seu eixo; - se $\mid a \mid > 1$ (ou seja $-1 > a > 1$) a curva alonga na vertical e se $\mid a \mid < 1$ (ou seja $-1 < a < 1$) a curva comprime na vertical; - este alongamento ou compressão recebe o nome de **amplitude** da curva; *- a amplitude é obtida fazendo* $\mid a \mid$.
Alongamento e compressão horizontal ou **Período**	- o coeficiente ***k*** determina o alongamento ou a compressão horizontal da curva e, por conseqüência, determina também o intervalo em que a curva se repete; - se $\mid k \mid > 1$ (ou seja $-1 > k > 1$), a curva comprime na horizontal e se $\mid k \mid < 1$ (ou seja $-1 < k < 1$), a curva alonga na horizontal; - o intervalo em que a curva se repete é denominado **período** e é obtido fazendo $P = \frac{2\pi}{\lvert k \rvert}$; *- só haverá alteração no período se* $k \neq 1$.

Translação vertical	*- só haverá deslocamento ou translação vertical se* $b \neq 0$; - o deslocamento ou translação vertical será para cima se $b > 0$; - o deslocamento ou translação vertical será para baixo se $b < 0$.
Translação horizontal ou **Deslocamento de fase**	*- só haverá translação horizontal se* $q \neq 0$; - o deslocamento ou translação será $\frac{q}{k}$ para a direita ou para a esquerda; - o deslocamento ou translação será para a direita se $\frac{q}{k} < 0$; - o deslocamento ou translação será para a esquerda se $\frac{q}{k} > 0$; - este deslocamento ou translação horizontal será $\frac{q}{k}$ e é denominado de **deslocamento de fase** ou **defasagem** da curva.
Freqüência	*- só haverá alteração de freqüência se* $k \neq 1$; - define-se **freqüência** destas funções como recíproco do período, ou seja, é $f = \frac{\lvert k \rvert}{2\pi}$.

As funções $y = senx$ e $y = \cos x$ apresentam os gráficos com: $amplitude = 1$, $período = 2\pi$, $defasagem = 0$ e $freqüência = \frac{1}{2\pi}$.

A curva de equação geral, segundo Anton (2000), $y = b + asen\left[k\left(x + \frac{q}{k}\right)\right]$ com *a*, *b*, *k* positivos e *q* negativo pode ser representado pelo gráfico a seguir:



Para resolver muitos exercícios aplicados, os modelos das funções seno $y = b + asen\left[k\left(x + \frac{q}{k}\right)\right]$ e cosseno $y = b + a\cos\left[k\left(x + \frac{q}{k}\right)\right]$ serão reescritos da seguinte forma: $y = b + asen\left[\frac{2\pi}{P}(x - c)\right]$ e $y = b + a\cos\left[\frac{2\pi}{P}(x - c)\right]$, sabendo que o período é dado por $P = \frac{2\pi}{k}$ e o deslocamento de fase é dado por $c = \frac{q}{k}$ (THOMAS, 2002).

.

É importante destacar que o exposto até o momento é aplicado em sala de aula, na disciplina de matemática, do Curso Técnico em Eletrônica, da Fundação Liberato. Porém, os conceitos apresentados a seguir fizeram parte de uma pesquisa que forneceu a base e o norte no desenvolvimento do conteúdo matemático, dando significado e fazendo o elo, entre a matemática e o conteúdo técnico apresentado.

3.2 Circuitos com excitação senoidal - análise gráfica e matemática do sinal senoidal

Propõe-se, como abordagem técnica do trabalho de análise gráfica das funções trigonométricas seno e cosseno, o estudo gráfico e matemático da forma de onda senoidal, conteúdo de importância fundamental para a análise de circuitos em corrente alternada já que, a geração, transmissão, distribuição e consumo de energia elétrica são feitas na forma de tensões e correntes senoidais. Segundo Nilsson,

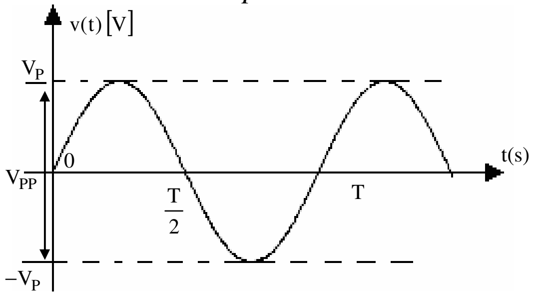
> ... a suposição de que o sistema está funcionando no regime senoidal quase sempre simplifica o projeto dos circuitos. Assim, um engenheiro pode formular as especificações em termos de uma resposta senoidal e projetar o sistema para que atenda a essas especificações. (NILSSON, 1999, 200)

É importante salientar que a função cossenoidal é a função senoidal defasada de 90°, portanto são equivalentes e, para o presente trabalho, foi escolhida a função seno. Apresenta-se, a seguir, formas de representação de um sinal senoidal.

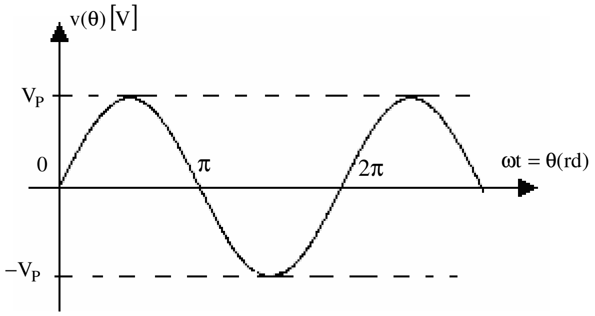
- *Graficamente em forma de onda* $\Rightarrow$ representa visualmente o sinal, tal como pode ser observado em instrumentos de bancada como o osciloscópio.

Graficamente, uma tensão senoidal pode ser representada de duas maneiras:

- *no domínio temporal*



- *no domínio angular*



Onde,

V_P = tensão de pico = amplitude máxima, positiva ou negativa, que a tensão senoidal pode atingir, dada em volts (V). É o $|a|$ na função $y = b + a sen\left[k\left(x + \frac{q}{k}\right)\right]$;

V_{PP} = tensão de pico a pico = amplitude total entre os valores máximos positivo e negativo, dada em volts (V) $\Rightarrow$ $V_{PP} = 2 \cdot V_P$;

T = período = tempo que a função necessita para completar um ciclo, dado em segundos (s). É o $\frac{2\pi}{|k|}$ na função $y = b + asen\left[k\left(x + \frac{q}{k}\right)\right]$;

f = freqüência = número de vezes que um ciclo se repete por segundo, dado em Hertz (Hz) ou em ciclos por segundo (c/s). E, $f = \frac{1}{T}$. É o $\frac{|k|}{2\pi}$ na função $y = b + asen\left[k\left(x + \frac{q}{k}\right)\right]$.

- *Forma trigonométrica* $\Rightarrow$ representa matematicamente a função com todos os seus detalhes, como: amplitude, freqüência angular e fase inicial, além de permitir o cálculo de valores instantâneos.

Matematicamente, o gráfico da tensão senoidal no domínio temporal é dado por: $v(t) = V_P \cdot sen\omega t$ e no domínio angular é dado por $v(\theta) = V_P \cdot sen\theta$;

onde, $v(t) = v(\theta) \Rightarrow$ valor da tensão no instante t ou para o ângulo θ, em volts (V);

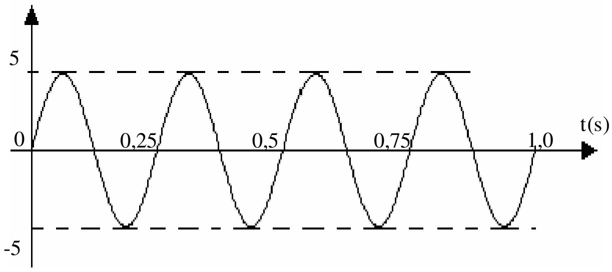
ω = freqüência angular ou velocidade angular = é a variação do ângulo θ do sinal em função do tempo, em radiano por segundo (rd/s). É o $|k|$ na função $y = b + asen\left[k\left(x + \frac{q}{k}\right)\right]$;

θ = ângulo, em radiano (rd).

E, se $v(t) = v(\theta)$, então $\theta = \omega t$ e se $\theta = 2\pi$, então $t = T$ e $2\pi = \omega T$.

Assim, $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{1/f} = 2\pi \cdot \frac{f}{1} = 2\pi \cdot f \Rightarrow \omega = 2\pi f$.

Exemplo 1: Dado o sinal senoidal a seguir (ALBUQUERQUE, 2002, 25),

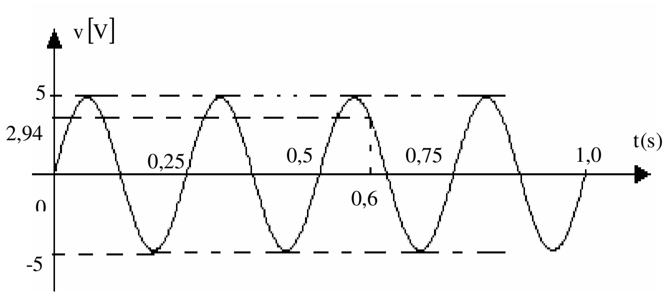


pode-se analisar:

- tensão de pico $\Rightarrow$ $V_P = 5\,V$;
- tensão de pico a pico $\Rightarrow$ $V_{PP} = 10\,V$;
- período $\Rightarrow$ $T = 0{,}25\,s$, pois um ciclo completo se repete a cada $0{,}25\,s$;
- freqüência $\Rightarrow$ $f = 4\,c/s = 4\,Hz$, pois em $1\,s$ são completados 4 ciclos.

Então, matematicamente, tem-se:

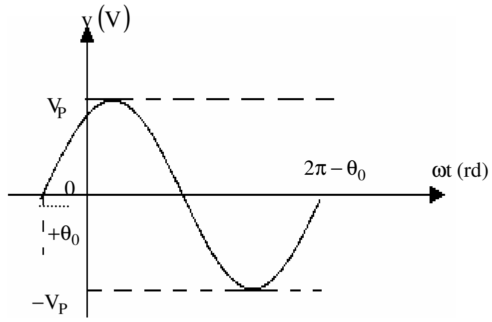
- freqüência $\Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}25} = 4\,Hz$
- freqüência angular $\Rightarrow$ $\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 4 = 8\pi\ rd/s$;
- tensão no domínio temporal $\Rightarrow$ $v(t) = V_P \cdot sen\varpi t = 5 \cdot sen8\pi t$
- se $t = 0{,}6\,s$, então o valor da tensão será $v(t) = 5 \cdot sen(8\pi 0{,}6) = 2{,}94\,V$, conforme representação no gráfico a seguir.



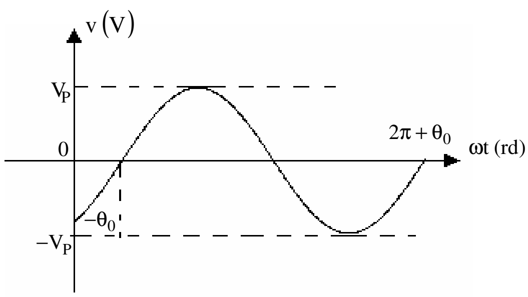
Fase inicial de um sinal alternado = $\theta_0 \Rightarrow$ onde inicia o sinal senoidal já que nem sempre o sinal inicia seu ciclo no instante $t = 0\,s$.É o $\frac{q}{k}$ na função $y = b + a sen\left[k\left(x + \frac{q}{k}\right)\right]$.

Assim, $v(t) = V_P \cdot sen(\varpi t + \theta_0)$, onde,

$\theta_0 > 0 \Rightarrow$ *se o sinal inicia seu ciclo adiantado, como mostra o gráfico,*



$\theta_0 < 0 \Rightarrow$ *se o sinal inicia seu ciclo atrasado, como mostra o gráfico,*



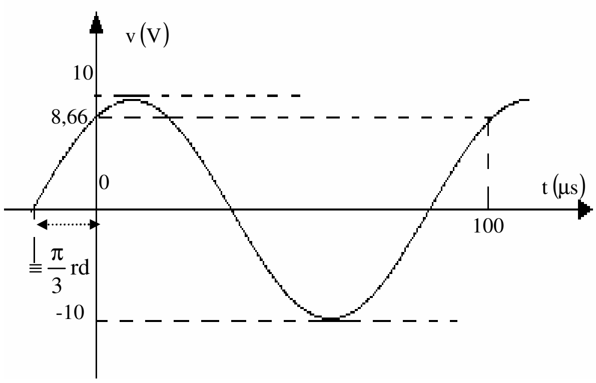
Exemplo 2: Representar graficamente o sinal senoidal $v(t) = 10 \cdot sen\left(20k\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\ (V)$ (ALBUQUERQUE, 2002, 27).

- freqüência $\Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20k\pi}{2\pi} = 10kHz$

- período $\Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10k} = 0{,}1\,ms = 100\,\mu s$

Logo, como $\theta = \frac{\pi}{3} > 0$, o sinal inicia seu ciclo adiantado de $\frac{\pi}{3}\,rd$.

Se $t = 0 \Rightarrow v(0) = 10 \cdot sen\left(20k\pi \cdot 0 + \frac{\pi}{3}\right) = 10 \cdot sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8{,}66\,V$ como mostra o gráfico a seguir.



ms = milisegundos $\quad 0{,}1ms = 100\mu s$

μs = microsegundos

Em análise de circuitos com excitação senoidal, não se tem uma referência absoluta de tempo, portanto o conceito de fase inicial é substituído pelo conceito de defasagem e adota-se um dos sinais do circuito como referência de fase $0°$.

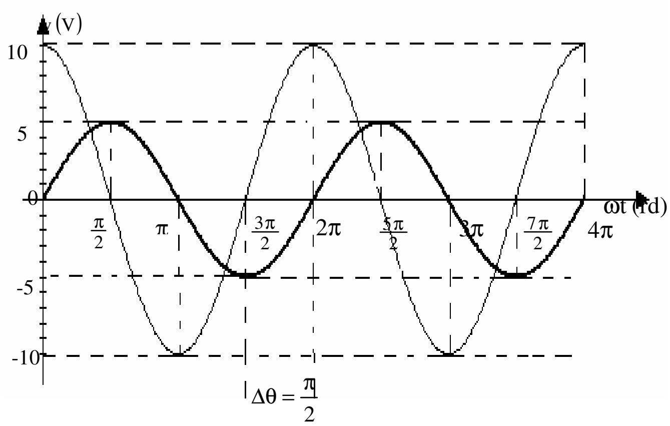
Defasagem = $\Delta\theta$ $\Rightarrow$ diferença de fase entre dois sinais de mesma freqüência. É medida tendo um dos sinais como referência.

Exemplo 3: Qual a defasagem entre os sinais

$v_1(t) = 10 \cdot sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\ (V)$ ——— e

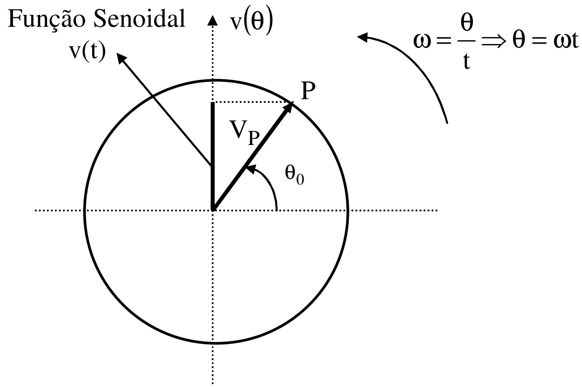
$v_2(t) = 5 \cdot sen\omega t\ (V)$ **———** (ALBUQUERQUE, 2002, 29)?

De acordo com o gráfico a seguir, é possível observar que v_1 está adiantado de $\frac{\pi}{2} rd$ em relação a v_2 ou v_2 está atrasado de $\frac{\pi}{2} rd$ em relação a v_1. Portanto, a defasagem de v_1 em relação a v_2 é de $\Delta\theta = \frac{\pi}{2} rd$ ou a defasagem de v_2 em relação a v_1 é de $\Delta\theta = -\frac{\pi}{2} rd$.



- *Diagrama fasorial* $\Rightarrow$ forma de representar um sinal senoidal utilizando um fasor. Representa graficamente o fenômeno de forma mais simplificada que a forma de onda, permitindo operações de adição e subtração de vários sinais.

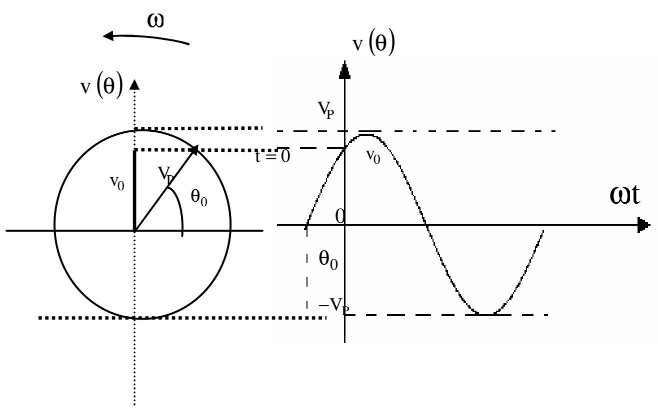
Fasor – é um número complexo usado para representar a amplitude e a fase de um sinal senoidal. É um segmento orientado girante de amplitude igual ao valor de pico (V_P) do sinal, girando com velocidade angular ω, no sentido anti-horário.



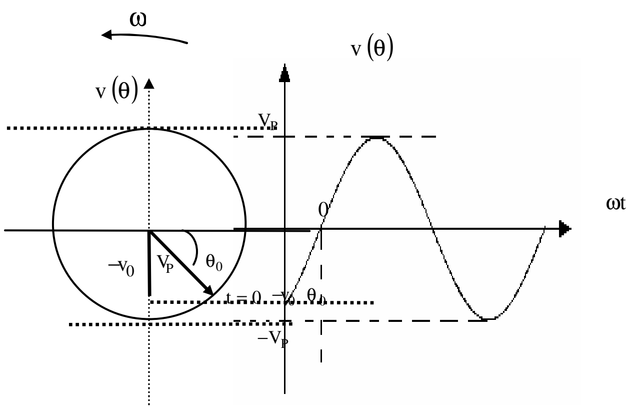
Onde, $\overline{OP} = V_P$ e $sen\theta =$ projeção de $\overline{OP}$ no eixo vertical, o que reproduz a tensão senoidal $v(t) = V_P \cdot sen\omega t$ e $v(\theta) = V_P \cdot sen\theta$

O valor instantâneo da tensão será dado por, $v(t) = V_P \cdot sen(\omega t + \theta_0)$ quando em $t = 0$ o vetor $\overline{OP}$ formar um ângulo θ_0 com a referência do diagrama fasorial (parte positiva do eixo horizontal), o que significa que o sinal possui uma fase inicial.

$\theta_0 > 0 \Rightarrow$ se o sinal inicia seu ciclo adiantado



$\theta_0 < 0 \Rightarrow$ se o sinal inicia seu ciclo atrasado



Exemplo 4: Representar os seguintes sinais senoidais graficamente e através do diagrama fasorial correspondente, determinando a defasagem entre eles,

(ALBUQUERQUE, 2002, 35).

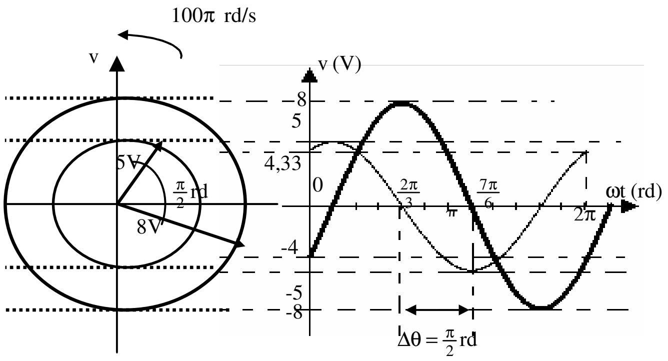
$$v_1(t) = 5 \cdot sen\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\ (V)$$

$V_P = 5V$ e o sinal inicia seu ciclo adiantado de $\frac{\pi}{3} rd$. Para $t = 0$, $v_1(0) = 5\, sen\frac{\pi}{3} = 4{,}33\,V$

$$v_2(t) = 8 \cdot sen\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right)\ (V)$$

$V_P = 8V$ e o sinal inicia seu ciclo atrasado de $\frac{\pi}{6} rd$. Para $t = 0$, $v_1(0) = 8\, sen\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -4V$

Analisando as representações a seguir, conclui-se que, a defasagem entre os sinais é de $\frac{\pi}{2} rd$ ou $90°$, estando v_1 adiantado em relação a v_2.



Convém salientar que os módulos das tensões, correntes, e potências elétricas, representados pelos números complexos, podem ser dados tanto por valores de pico (V_P) quanto por valores eficazes (V_{ef} ou V_{rms}), conceitos estes estudados no conteúdo de circuitos elétricos. Convém salientar, também, que o fasor pode ser representado por $\dot{Z} = |Z| \cdot e^{-j\theta}$, onde $\theta = \omega t$ (Euler), forma tão completa quanto a forma trigonométrica, porém estes conceitos não serão abordados no presente artigo.

4 Considerações finais

Com este trabalho pode-se concluir que o uso da informática como instrumento que instigue os alunos a investir na aprendizagem de conceitos matemáticos para efetuar um trabalho diferente do habitual, mais dinâmico e provocador de aprendizagem, forneceu aos alunos um meio de controle e de validação de suas hipóteses.

Por meio dos aspectos visuais, os alunos podem fazer conjecturas, descobrir padrões, familiarizar-se com as formas de representação analítica e gráfica das funções trigonométricas seno e cosseno, bem como transpor estes conceitos matemáticos para a análise de circuitos senoidais, tão importante para a área técnica.

A reflexão sobre a exploração visual permite que o aluno construa seu próprio conhecimento matemático, interprete a linguagem simbólica e a gráfica com maior destreza e seja capaz de, ao ler uma expressão analítica, imaginar o esboço de seu gráfico e vice-versa, bem como ter maior domínio na comunicação matemática. Assim, considera-se a interdependência entre pensamento e linguagem como um instrumento para o desenvolvimento da compreensão matemática. Neste sentido, Vygotsky afirma que,

> o pensamento só existe na palavra que participa no processo de sua construção. A linguagem possibilita ao pensamento abstrair, generalizar as características do mundo externo, formar conceitos, fazer deduções, tirar conclusões, integrando a organização dos processos cognitivos, através de sua função mediadora. (VYGOTSKY, 1991, 81)

Referencias

ALBUQUERQUE, Rômulo Oliveira. *Circuitos em corrente alternada.* 10 ed. São Paulo: Érica, 2002.

ANTON, Howard. *Cálculo um novo horizonte.* V1. Tradução de Cyro de Carvalho Patarra e Márcia Tamanaha, 6 ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: 1998.

MORAES, Maria Cândida. *O paradigma educacional emergente*. 5 ed. Campinas: Papirus, 2000.

NILSSON, James W., RIEDEL, Susan A. *Circuitos elétricos*. Tradução de Ronaldo Sérgio de Biasi. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

THOMAS, George B., FINNEY, Ross L.; WEIR Maurice D.; GIORDANO, Frank R. *Cálculo*. V1. Tradução de Paulo Boschcov. 10 ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

VYGOTSKY, Lev Somenovich. *A formação social da mente* . 4 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.